1 Richiami di concetti di base

In questo capitolo preliminare richiamiamo, senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità, alcuni concetti di "matematica di base", già noti dalle scuole medie superiori. Gli argomenti scelti sono quelli relativamente ai quali gli studenti del corso hanno riscontrato maggiori difficoltà.

0.1 Qualche prodotto e scomposizione notevole

In molti casi la risoluzione degli esercizi richiede l'esecuzione di prodotti di espressioni letterali al fine di semplificare le scritture o di ottenere i risultati voluti. Molti di questi prodotti sono notevoli, in quanto si presentano frequentemente e possono essere eseguiti rapidamente con l'uso di opportuni accorgimenti. Gli stessi accorgimenti, usati "in senso inverso", consentono di trasformare in prodotti certe espressioni algebriche scritte sotto forma di somma, e anche questa è una tecnica necessaria per risolvere gli esercizi. Qui di seguito raccogliamo alcune delle formule più comuni, fornendo anche qualche esempio di applicazione.

0.1.1 Raccoglimento a fattor comune

Conviene considerare subito degli esempi.

Esempi.

$-6x + 2x^2y + 4xy^2 = 2x\left(3 + xy + 2y^2\right)$.

$-a^2b + ab^2 = ab(a + b)$.

A volte il raccoglimento può richiedere "due tempi".

Esempi.

$-ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$.

Come si vede questo tipo di processo richiede un po' più di fantasia!

0.1.2 Prodotto di una somma per una differenza

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Questa formula consente di eseguire velocemente il prodotto indicato e, letta in senso inverso, di trasformare la differenza di due quadrati in un prodotto.

1 Esempi.

- $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$
- $(-x-2)(-x+2) = (-x)^2 - 4 = x^2 - 4.$
- $x^2 - 3 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

1.0.1 Quadrato di un binomio

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Esempi.
$-(x+2y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2.$
$-(4x-3y)^2 = (4x)^2 - 2(4x)(3y) + (3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2.$
$-x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
Le tecniche precedenti, e quelle che presenteremo successivamente, possono anche essere combinate tra loro.
Esempi.
$-x^3 + 6x^2 + 9x = x\left(x^2 + 6x + 9\right) = x(x+3)^2.$
$-(x+y-z)(x+y+z) = [(x+y)-z][(x+y)+z] = (x+y)^2 - z^2 = x^2 + 2xy + y^2 - z^2.$

1.0.2 Cubo di un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Esempi.
$-(2x+y)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3 \cdot 2x(y)^2 + y^3 = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3.$
$-\left(x^2 - 3y\right)^3 = \left(x^2\right)^3 - 3\left(x^2\right)^2 3y + 3x^2(3y)^2 - (3y)^3 = x^6 - 9x^4y + x^2y^2 - 27y^3.$

1.0.3 Somma o differenza di due cubi

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right), \quad a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Esempi.
$-\left(x^3 - 1\right) = (x-1)\left(x^2 + x + 1\right).$
$-\left(8x^3 + 27y^3\right) = (2x+3y)\left(4x^2 - 6xy + 9y^2\right).$
Si noti che, a differenza del caso dei quadrati, si può scomporre sia la somma che la differenza di due cubi. Si noti anche che i due trinomi tra parentesi dopo la scomposizione non sono dei quadrati, perchè non c'è il doppio prodotto.

1.1 Richiami sui radicali

In molte situazioni è utile saper semplificare espressioni contenenti radicali, senza approssimarli fin da subito con espressioni decimali. Un semplice esempio chiarirà il perché di questo fatto.

Supponiamo di dover calcolare $(\sqrt{2})^8$. Se teniamo conto delle proprietà delle potenze e dei radicali otteniamo $(\sqrt{2})^8 = \left((\sqrt{2})^2\right)^4 = 2^4 = 16$, senza alcuna

approssimazione. Se invece approssimiamo $\sqrt{2}$ con 1.4, commettiamo un errore di poco più di un centesimo, trascurabile in molte situazioni. Calcolando però l'ottava potenza otteniamo (circa) 14.76, al posto del risultato corretto 16: un errore decisamente troppo grande! Naturalmente usando un maggior numero di cifre dopo la virgola per approssimare la radice quadrata di 2 le cose si sarebbero rimesse a posto, ma non sempre succede così, e il problema della correttezza delle approssimazioni numeriche è molto complesso.

Richiamiamo qui, fornendo anche qualche esempio, solo alcune delle tecniche di base utili per operare con i radicali, segnalando che i radicandi saranno sempre considerati positivi e che saremo principalmente interessati al caso di radici quadrate o al massimo cubiche.

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad \text{(definizioni)}.$$
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad \text{(radice di un prodotto)}.$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{(radice di un quoziente)}$$
$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(potenza di un radicale)}.$$
$$\sqrt[n]{a^{np}} = a\sqrt[n]{a^p} \text{(" portare fuori o dentro" dal segno di radice)}.$$
$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{(semplificazione di un radicale)}.$$

Ricordiamo poi che non è valida alcuna proprietà relativamente alla radice di una somma: $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$. Per quanto riguarda poi le operazioni di somma e prodotto coinvolgenti radicali si possono sommare solo radicali simili, mentre per moltiplicare due radicali bisogna "ridurli allo stesso indice".

Esempi.
$-5\sqrt{8} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2^2 2} + 3\sqrt{2} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$.
$-3\sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{2} = 3\sqrt{3^2 3} - \sqrt{2^2 3} + \sqrt{2} = 3 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2} = 7\sqrt{3} + \sqrt{2}$.
$-\sqrt{2}\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3}\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 4} = \sqrt[6]{32}$.

1.2 Frazioni algebriche

Una frazione algebrica è il quoziente di due polinomi. Per esempio

$$\frac{x^3 + xy + y^2 + 2}{x^2 - y}$$

è una frazione algebrica.

Le operazioni sulle frazioni algebriche si eseguono esattamente come le operazioni sulle frazioni numeriche. Saremo interessati a qualche semplificazione, somma o prodotto di frazioni algebriche (in casi molto semplici!).

Esempi.

$$- \frac{x^2+x}{x^2-1} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{x+x+2}{x-1} = \frac{2x+2}{x-1}.$$

$$- \frac{3x(x+2)}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \frac{3x(x+2)}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \frac{3x(x-1)}{x+1} = \frac{3x^2-3x}{x+1}.$$

$$- \frac{x^2-1}{x^3+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)\,(x^2-x+1)} = \frac{x-1}{x^2-x+1}.$$

2 Insiemi, numeri, funzioni

3 2.1 Insiemi

Assumiamo la nozione di insieme come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo "un insieme è una collezione di oggetti, detti elementi", ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire "un insieme è un insieme". Abitualmente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive: $A, B, \ldots$

La scrittura

$$x \in A$$

sta ad indicare che l'oggetto x è un elemento dell'insieme A e si legge " x appartiene ad A ". La (2.1) si può scrivere anche $A \ni x$. La negazione della (2.1) si scrive

$$x \notin A,$$

che si legge, naturalmente, " x non appartiene ad A" ". La (2.2) si può scrivere anche $A \not\ni x$.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando il simbolo $\forall$ ("per ogni"),

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

dove la doppia freccia "$\Leftrightarrow$" si legge "*se e solo se*".

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto insieme vuoto e indicato con $\emptyset$, privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare tutti gli elementi, per esempio $A = \{0, \pi, \sqrt{2}, \text{Pordenone }\}$

2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio $A = \{x \mid x \text{ è un numero naturale pari }\}$.

La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere $A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 , ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{2, 3, \ldots\}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme, P, dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio $31 \in P$, è molto più difficile verificare che anche $15485863 \in P$, e per verificare che $2^{43112609} - 1 \in P$ (uno dei più grandi [(1)] primi conosciuti alla fine del 2009, con ben 12978189 cifre) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi A e B, se ogni elemento di A è anche elemento di B, diremo che A è un sottoinsieme di B, o che è contenuto in B, o anche che B è un soprainsieme di A, o che contiene A, e scriveremo

$$A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$, cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che $A \subseteq B$, ma che esiste qualche elemento di B che non è contenuto in A useremo la scrittura

$$A \subset B, \text{ oppure } B \supset A$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) proprio.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto: $\emptyset \subseteq A, \forall A$. Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se $a \in A$, allora $\{a\} \subseteq A$. Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli $\in$ e $\subset$ (o $\subseteq$): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme A ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto insieme delle parti e indicato con $\mathscr{P}(A)$. Per esempio, se $A = \{a, b\}$, allora

$$\mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

3.1 Operazioni tra insiemi

Definizione 2.1 (Unione di insiemi). Dati due insiemi A e B, si chiama loro unione, e si indica con $A \cup B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A, a B o a entrambi $i^{(2)}$.

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Esempio. Se $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, allora $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Definizione 2.2 (Intersezione di insiemi). Dati due insiemi A e B, si chiama loro intersezione, e si indica con $A \cap B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad A e a B.

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio precedente, allora $A \cap B = \{2, 3\}$.

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono disgiunti. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

[1] A coloro che si chiedono quale possa essere l'interesse concreto a scoprire numeri primi sempre più grandi, segnaliamo che tutti gli algoritmi crittografici oggi usati, in particolare nel web, sono basati sull'uso di numeri primi con parecchie centinaia di cifre.

[2] I simboli $\vee$, vel, ed $\wedge$, et, sono normalmente usati in logica e nella teoria degli insiemi. Significano, rispettivamente, "o, oppure" ed "e contemporaneamente". Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione e si possono verificare per utile esercizio.

$$A \cup A = A; A \cap A = A;$$
$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A;$$
$$A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset;$$
$$A \cup B \supseteq A; A \cap B \subseteq A;$$
$$A \cup B = A \Leftrightarrow A \supseteq B; A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Si noti che le proprietà distributive sono due: dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione. Nel caso della somma e prodotto tra

numeri vale solo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma: $a(b+c) = ab + ac$.

Definizione 2.3 (Differenza di insiemi). Dati due insiemi A e B, si chiama loro differenza, e si indica con $A\backslash B$, o anche con $A - B$, l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad A ma non a B.

$$A\backslash B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Esempio. Se A e B sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora $A\backslash B = \{0, 1\}$.

Nel caso che $B \subseteq A$, l'insieme $A\backslash B$ si chiama anche complementare di B rispetto ad A e si indica con $\complement_A B$, o semplicemente con $\complement B$ se l'insieme A è precisato una volta per tutte. In molte situazioni si conviene di fissare un insieme, detto universo, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi: questo evita di avere problemi tipo quelli del paradosso [3] del barbiere. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Assumiamo anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di coppia ordinata, che indicheremo con (x, y), dove è importante il posto occupato dagli elementi x e y :

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1.$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{a, b\} = \{b, a\} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a).$$

Definizione 2.4 (Prodotto cartesiano). Dati due insiemi A e B si chiama loro prodotto cartesiano, o semplicemente prodotto, l'insieme, indicato con $A \times B$, delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A e il secondo a B :

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

[3] Questo famoso paradosso, formulato da Bertrand Russell agli inizi del 1900, è uno dei più importanti della storia della logica. Si può sintetizzare come segue: In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. La domanda che ci poniamo è: il barbiere rade se stesso? È una conseguenza immediata della definizione che $A \times B \neq B \times A$. Nel caso particolare che $A = B$ si scrive anche A^2 in luogo di $A \times A$.

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso n volte si scriverà A^n in luogo di $A \times A \times \cdots \times A$

4 2.3 Numeri

Gli "oggetti base" su cui opera la matematica sono i numeri. Gli insiemi numerici che useremo sono i seguenti:

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

La natura di questo corso non ci consente una trattazione dettagliata delle proprietà di questi insiemi, che riterremo sostanzialmente noti dalla scuola media superiore. Richiameremo solo alcune delle nozioni più significative, cominciando con il "presentare" questi insiemi.

- $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali che, come diceva Leopold Kronecker (1823-1891), possono essere considerati un dono di Dio: "Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo". Per noi l'insieme dei numeri naturali è:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

L'insieme dei numeri naturali ha un minimo elemento (lo 0) e non ha un massimo elemento. Anche un qualunque sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo elemento.

- $\mathbb{Z}$ (il simbolo usato è legato alla parola tedesca zahl, cioè numero, cifra) è l'insieme dei numeri interi, ovvero, almeno a livello molto intuitivo, dei "numeri naturali con segno" (attenzione però al fatto che $+0 = -0 = 0$, ovvero al fatto che 0 non ha segno!):

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Proprietà comune ai naturali e agli interi è che ogni numero ha un successivo.

- $\mathbb{Q}$ (il simbolo usato è dovuto al fatto che si tratta, sostanzialmente, di quozienti, o rapporti, ratio in latino) è l'insieme dei numeri razionali, ovvero delle frazioni con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero. Per essere precisi, occorre tenere conto che due frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono uguali, rappresentano lo stesso numero. Si può anche pensare di attribuire il segno solo al numeratore, ritenendo che il denominatore sia un numero naturale (diverso da zero):

$$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}.$$

I numeri razionali si possono anche scrivere come numeri decimali, finiti o periodici. Una delle novità sostanziali dell'insieme dei razionali rispetto a quello degli interi è il fatto che non si può più parlare di successivo di un numero, anzi, tra due razionali qualsiasi esiste sempre (almeno) un altro razionale (e quindi infiniti):

se $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{p}{q}$, allora il numero $c = \dfrac{a+b}{2}$ è razionale ed è compreso tra a e b.

- $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali. Un'introduzione rigorosa di questo insieme di numeri esula dagli scopi di questo corso. Possiamo, almeno a livello elementare, pensare a questi numeri come all'insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come π, ecc. Potremmo anche pensarli come l'insieme di tutti gli allineamenti decimali, finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici, anche se questo modo di introdurre i reali si scontra con grosse difficoltà quando si devono eseguire le operazioni (come si possono sommare, o peggio ancora moltiplicare, due allineamenti illimitati, se devo cominciare "all'estrema destra", e tenere conto di tutti i riporti?).

A partire dall'insieme dei naturali, questi insiemi numerici, nell'ordine in cui sono stati presentati, sono via via sempre più grandi, nel senso che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Comune a tutti questi insiemi è la possibilità di eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, con proprietà via via sempre più soddisfacenti, come per esempio il fatto che in $\mathbb{N}$ non si può sempre fare la sottrazione, mentre in $\mathbb{Z}$ e successivi si, in $\mathbb{Z}$ non si può sempre fare la divisione, mentre in $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ si (tranne per zero, ovviamente!).

Occasionalmente avremo la necessità di utilizzare anche l'insieme dei numeri complessi, che si indica con $\mathbb{C}$ e che è un soprainsieme dell'insieme dei numeri reali: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il vantaggio principale di questo insieme numerico è che in esso si può sempre estrarre la radice quadrata, anche dei numeri negativi.

5 2.4 Intervalli di numeri reali

Alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali sono particolarmente importanti nell'analisi. Ne consideriamo la definizione e le proprietà in questo paragrafo.

Definizione 2.5. Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano intervalli, con la specificazione a fianco segnata, *i* seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

$]a, a[$	$\emptyset$	intervallo vuoto
$]a, b[$	$\{x \mid a < x < b\}$	intervallo limitato aperto
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	intervallo limitato chiuso
$[a, b[$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	intervallo limitato chiuso a sinistra *e* aperto a destra
$]a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	intervallo limitato aperto a sinistra *e* chiuso a destra
$]a, +\infty[$	$\{x \mid x > a\}$	intervallo superiormente illimitato aperto
$[a, +\infty[$	$\{x \mid x \geq a\}$	intervallo superiormente illimitato chiuso
$]-\infty, a[$	$\{x \mid x < a\}$	intervallo inferiormente illimitato aperto
$]-\infty, a]$	$\{x \mid x \leq a\}$	intervallo inferiormente illimitato chiuso

I numeri reali a e b, oppure soltanto a o soltanto b, si chiamano estremi dell'intervallo. Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti, quelli illimitati anche semirette.

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due.

Anche per l'intero insieme $\mathbb{R}$ si usa la scrittura $]-\infty, +\infty[$ e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Nel caso che $a = b$ l'intervallo chiuso $[a, a]$ si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di intervallo nullo.

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

si dà il nome di centro e al numero

$$\delta = b - x_0 = x_0 - a$$

si dà il nome di raggio o semiampiezza. L'intervallo (aperto) di centro x_0 e raggio δ è allora

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice interno all'intervallo.

6 2.5 Funzioni

Dati due insiemi A e B hanno grande interesse nelle applicazioni le relazioni che possono intercorrere tra di loro. Tra tutte le relazioni hanno un interesse cruciale le funzioni, in particolare le funzioni che collegano tra di loro insiemi di numeri reali. Vista l'importanza del concetto diamo una definizione esplicita di funzione, che riassuma quelle che sono le proprietà che ci interesseranno.

Definizione 2.6. Dati due insiemi A e B (che per noi saranno sempre due insiemi di numeri reali), si dice funzione di A in B una qualunque legge che faccia corrispondere a ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.

L'insieme A è detto dominio della funzione, l'insieme B è detto codominio. Se x è un elemento dell'insieme A e y è l'unico elemento di B che corrisponde ad A, si dice che y è funzione di x e si scrive $y = f(x)$ (leggi: " y uguale a effe di x").

La notazione più completa per le funzioni è la seguente:

$$f : A \to B, x \mapsto f(x),$$

ma spesso si scrive solo

$$x \mapsto f(x),$$

se gli insiemi A e B sono già stati precisati o sono chiari dal contesto. Si può anche dire semplicemente la funzione $y = f(x)$, anche se i puristi potrebbero storcere il naso.